## **Solusi Relasi Relasi Rekuren**

Relasi rekuren berperan penting dalam beberapa aspek studi algoritma dan kompleksitasnya. Di sini akan ditunjukkan bagaimana relasi rekuren bisa digunakan untuk menganalisis kompleksitas dari algoritma divide and conquer, seperti algoritma merge sort yang kita perkenalkan pada bab sebelumnya. Algoritma divide and conquer secara rekursif membagi satu masalah menjadi sejumlah subproblem yang tidak tumpang tindih sampai menjadi cukup sederhana untuk diselesaikan secara langsung. Kami menyimpulkan bagian ini dengan memperkenalkan paradigma algoritma lain yang dikenal sebagai *dynamic programming*, yang dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak masalah optimasi secara efisien.

**Definisi 1**

Relasi rekuren linear homogen derajat *k* dengan koefisien konstan merupakan relasi rekuren dari bentuk *an = c1an-1* + *c2an-2* + … + *ckan-k* dimana *c1, c2, …, ck* merupakan bilangan real, dan *ck* 0.

**Contoh 2**

Relasi rekuren *Pn* = (1.11)*Pn-1* adalah relasi rekuren linear homogen satu derajat. Relasi rekuren *fn = fn -1 + fn -2* adalah relasi rekuren linear homogen dua derajat. Relasi rekuren *an* = *an-5* adalah relasi rekuren linear homogen lima derajat.

**Contoh 3**

Relasi rekuren *an* = *an-1 + a2n-2* tidak linear. Relasi rekuren *Hn* = 2*Hn-1* + 1 tidak homogen. Relasi rekuren *Bn* = *nBn-1* tidak memiliki koefisien konstan.

**Teorema 1**

Misalkan *c1* dan *c2* adalah bilangan real. *r*2 – *c1r – c2* = 0 mempunyai dua akar berbeda *r1* dan *r2*. Maka sequence {*an*} adalah solusi dari relasi rekuren *an* = *c1an-1* + *c2an-2* jika dan hanya jika

*an* = *1r1n* + *2r2n* untuk *n =* 0, 1, 2, …, dimana *1*dan *2* konstanta.

**Teorema 2**

Misalkan *c*1 dan *c*2 adalah bilangan real dengan *c*2 ¹ 0. Ditunjukkan bahwa *r*2 – *c1r – c2* = 0 hanya mempunyai satu akar *r0*. Maka sequence {*an*} adalah solusi dari relasi rekuren *an* = *c*1*an*-1+ *c2an-2* jika dan hanya jika *an* = a1*r*0*n* + a2*nr0n* untuk *n =* 0, 1, 2, …, dimana *1*dan *2* konstanta.

**Contoh 4**

Apakah solusi dari relasi rekuren *an* = *an-1* + *2an-2* dengan initial condition *a0* = 2 dan *a1* = 7 ?

Jawab:

Langkah-langkah penyelesaian:

Berdasarkan teorema 1, misalkan: *r*2 – *c1r – c2* = 0 …… (1)

*an* = *c1an-1* + *c2an-2* …… (2)

*an* = a1*r1n* + a2*r2n* …… (3)

1. Dari persamaan *an* = *an-1* + *2an-2*, berarti *c*1 = 1 dan *c*2 = 2.
2. Substitusi nilai *c*1 dan *c*2 ke persamaan (1) menjadi *r2 – r* – 2 = 0 …… (4).
3. Mencari akar-akar dari persamaan (4):

*r2 – r* – 2 = 0

(*r* – 2) (*r* + 1) = 0

(*r* – 2) = 0 atau (*r* + 1) = 0

*r* = 2 atau *r* = – 1

Sehingga didapat akar-akar persamaan (4) yaitu *r*1 = 2 dan *r*2 = –1.

1. Substitusi nilai *r*1 dan *r*2 ke persamaan (3) menjadi *an* = 12*n* + 2(*–*1)*n* …… (5)
2. Substitusi initial condition *a0* = 2 dan *a1* = 7 ke persamaan (5) menjadi

*a0* = a1 + a2 = 2 …… (6)

*a1* = a1 × 2 + a2 × (*–*1) = 7 …… (7)

1. Selesaikan persamaan (6) dan (7):

a1 + a2 = 2

2a1 – a2 = 7 +

3a1 = 9

a1 = 3 à a2 = *–*1

Sehingga didapat nilai a1 = 3 dan a2 = *–*1.

1. Substitusi nilai a1 dan a2 ke persamaan (3) menjadi *an = 3 2n* *–* (*–1*)*n*.

Jadi, solusi dari relasi rekuren *an* = *an-1* + *2an-2* dengan initial condition *a0* = 2 dan *a1* = 7adalah sequence {*an*} dengan *an = 3 2n* *–* (*–1*)*n*.

## **Soal-soal Latihan b**

6.1 Tentukan solusi dari relasi rekuren: *an* = 6*an-1 –* *9an-2*

dengan initial condition: *a0* = 1 dan *a1* = 6.

6.2 Tentukan solusi dari relasi rekuren: *an* = *–* 3*an-1 –* 3*an-2* *–* *an-3*

dengan initial condition: *a0* = 1, *a*1 = *–* 2, dan *a*2 = *–* 1.

6.3 Tentukan solusi dari relasi rekuren: *an* = 6*an-1 –* 11*an-2* *–* 6*an-3*

dengan initial condition: *a0* = 2, *a*1 = 5, dan *a*2 = 15.

**Pembahasan:**

6.1 Dari persamaan *an* = 6*an-1 –* *9an-2*, berarti *c*1 = 6 dan *c*2 = *–9*.

Lalu*, r2* – 6*r* + 9 = 0

(*r* – 3) (*r* – 3) = 0

Satu-satunya akar dari persamaan tersebut adalah *r* = 3.

Lalu, *an* = 13*n* + *2n3n­*(Teorema 2)

Berdasarkan initial condition, maka:

*a0* = 1 = a1

*a1* = 6 = a1 × 3 + a2 × 3

Karena a1 = 1 à a2 = 1

Penyelesaian dua persamaan tersebut adalah a1 = 1 dan a2 = 1.

Sehingga, solusi untuk relasi rekuren dan initial condition di atas adalah sequence {*an*} dengan *an =* 3*n* + *n*3*n*.

6.2 Persamaan karakteristik dari relasi rekuren di atas adalah *r3 +* 3*r2 +* 3*r* + 1 = 0.

Karena *r3 +* 3*r2 +* 3*r* + 1 = (*r* + 1)3 hanya memiliki 1 akar *r* = *–*1 dari tiga jenis persamaan karakteristik.

Penyelesaian untuk relasi rekuren tersebut adalah:

*an* = 1,0(*–*1)*n* + 1,1*n*(*–*1)*n* + 1,2*n2*(*–*1)*n*(Teorema 2)

Untuk menentukan konstanta 1,0,1,1, dan 1,2, gunakan initial condition sehingga

0 = 1 = 1,0

1 = *–*2 = *–*1,0 *–*1,1 *–*1,2

2 = *–*1 = 1,0 + 21,1 +1,2

Solusi dari ketiga persamaan tersebut adalah 1,0 = 1, 1,1 = 3, dan 1,2 = *–*2.

Sehingga, solusi khusus untuk relasi rekuren ini dan initial conditionnya adalah sequence {*an*} dengan *an* = (1 + 3*n* – 2*n2*)( –1)*n*

6.3 Persamaan karakteristik dari relasi rekuren di atas adalah *r3 –* 6*r2 +* 11*r* *–* 6 = 0.

Karena *r3 –* 6*r2 +* 11*r* *–* 6 = (*r* – 1) (*r* – 2) (*r* – 3), maka kkar dari persamaan ini adalah *r* = 1, *r* = 2, dan *r* = 3.

Kemudian,

*an* = *a*1 . 1*n* + *a*2 . 2*n* + *a*3 . 3*n*

Berdasarkan initial condition, maka:

*a*0 = 2 = *a*1 + *a*2 + *a*3,

*a*1 = 5 = *a*1 + *a*2 . 2 + *a*3 . 3,

*a*2 = 15 = *a*1 + *a*2 . 4 + *a*3 . 9,

Penyelesaian tiga persamaan tersebut adalah a1 = 1 dan a2 = –1, dan a3 = 2.

Sehingga, solusi khusus untuk relasi rekuren ini dan initial conditionnya adalah sequence {*an*} dengan *an* = 1 – 2*n*  + 2.3*n*